



Étude du transfert de chaleur dans un espace annulaire rhombique horizontal avec et sans ailettes

Study of heat transfer in horizontal bare and finned annuli

M.-I. Farinas^{a,*}, A. Garon^{a,c}, K. St-Louis^a, M. Lacroix^{b,c}

^aDépartement de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal, C.P. 6079, Succ. Centre-Ville, Montréal, Québec H3C 3A7, Canada

^bDépartement de Génie Mécanique, Université de Sherbrooke, 2500 Boulevard Université, Sherbrooke, Québec J1K 2R1, Canada
^cCERCA, 5160 boul. Décarie, suite 400, Montréal, Québec H3X 2H9, Canada

Reçu le 10 mars 1999

Résumé

Une étude numérique de la convection naturelle laminaire dans une cavité rhombique horizontale remplie d'air avec et sans ailette a été réalisée. Une méthode d'éléments finis adaptative est retenue pour prédire les écoulements convectifs complexes. Des simulations ont été effectuées pour des largeurs de cavité Eg variant de 0.25 à 0.875, deux configurations d'ailettes dont la longueur va de 0.3 à 0.7 et des nombres de Rayleigh s'échelonnant entre 10^3 et 10^7 . Les résultats démontrent que le transfert de chaleur est maximal dans une cavité étroite de largeur $Eg = 0.25$ munie d'ailettes de longueur $l = 0.7$ (configuration 1). Dans ce cas, la conduction domine la convection. Quand, d'autre part, la convection domine, le transfert de chaleur est maximisé avec $Eg = 0.875$ et $l = 0.7$. La conductivité équivalente k_{equ} a été corrélée ainsi en fonction du nombre de Rayleigh pour toutes les géométries étudiées: $k_{\text{equ}} = CRa^n$. © 1999 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

Abstract

A numerical study is presented for the laminar natural convection in a differentially heated horizontal bare and finned rhombic annulus filled with air. An adaptive finite-element method is adopted to predict the complex recirculating buoyancy driven flows. Simulations were conducted for cavity widths Eg ranging from 0.25 to 0.875, for two different fin configurations with fin lengths l varying from 0.3 to 0.7 and Rayleigh numbers Ra ranging from 10^3 to 10^7 . Results indicate that the heat transfer is maximized for a narrow cavity $Eg = 0.25$ with fin length $l = 0.7$ (configuration 1). In this case, conduction prevails over convection. On the other hand, when convection is dominant, the heat transfer is maximum for $Eg = 0.875$ and $l = 0.7$. The equivalent thermal conductivity k_{equ} was correlated in terms of Ra for all geometries via $k_{\text{equ}} = CRa^n$. © 1999 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

* Corresponding author.

Nomenclature

| | |
|-------------------|--|
| c_p | chaleur spécifique |
| C | coefficient dans l'Éq. (5) |
| Eg | espace annulaire [= $(L_o - L_i)/L_o$] |
| \bar{g} | accélération gravitationnelle, ($m\ s^{-2}$) |
| \bar{l} | tenseur métrique |
| k | conductivité thermique ($W\ m^{-1}\ ^\circ C^{-1}$) |
| k_{equ} | conductivité équivalente [= $\overline{Nu}/\overline{Nu}_0$] |
| l | longueur d'ailette adimensionnelle (par rapport à la largeur de la cavité) |
| L | diagonale du rhombique (m) |
| n | exposant dans l'Éq. (5) |
| \overline{Nu} | nombre de Nusselt moyen |
| \overline{Nu}_0 | nombre de Nusselt moyen à $Ra = 1$ |
| P | pression |
| Pr | nombre de Prandtl [= $\mu c_p/k$] (=0.7, air) |

| | |
|------|---|
| Ra | nombre de Rayleigh [= $\bar{g}\beta\Delta TL_o^3\rho/\mu\alpha$] |
| T | température |
| u | vitesse |

Symboles grecs

| | |
|----------------|--|
| α | diffusivité thermique ($m^2\ s^{-1}$) |
| β | coefficient d'expansion thermique (K^{-1}) |
| μ | viscosité dynamique ($kg\ m^{-1}\ s^{-1}$) |
| ρ | densité ($kg\ m^{-3}$) |
| $\bar{\sigma}$ | tenseur des contraintes |

Indices

| | |
|------|---------------------------------------|
| C, H | paroi froide et chaude respectivement |
| i, o | interne et externe respectivement |
| O | référence |

1. Introduction

Le problème de transfert de chaleur par convection naturelle dans des enceintes a été l'objet d'un nombre considérable d'études au cours des deux dernières décennies. En effet, les nombreuses applications reliées à ce phénomène justifient aisément les travaux qui y sont consacrés. À titre d'exemple, citons l'isolation de composants électroniques, les échangeurs de chaleur, les capteurs solaires et les réacteurs nucléaires.

Ostrach [1] présente une revue générale des travaux effectués sur la convection naturelle pour diverses cavités. La plupart des géométries étudiées sont des cylindres concentriques et excentriques [2–7], des cylindres cofocaux [8] ou des cavités rectangulaires [9]. Toutefois, il existe peu d'études traitant de la convection naturelle dans un espace annulaire rhombique. Malgré le fait que cette géométrie soit moins courante, elle présente beaucoup d'intérêt pour le refroidissement de barreaux de combustibles nucléaires et aussi dans la conception de certains échangeurs de chaleur.

Moukalled et al. [10] ont étudié numériquement la convection naturelle dans un espace annulaire rhombique. L'espace de calcul est représenté par un maillage curviligne et les équations de conservation sont résolues par une méthode de volumes finis. Quatre cavités annulaires et trois angles rhombiques sont analysés. Toutefois, les résultats pour la conductivité thermique équivalente ne sont pas corrélés et les auteurs n'ont pas analysé l'effet des ailettes sur le transfert de chaleur.

On se propose donc dans la présente étude de traiter le problème de convection naturelle dans un espace annulaire rhombique horizontal sans ailette puis avec ailettes. Afin de décrire avec précision les écoulements

complexes, une méthode numérique d'éléments finis adaptatifs a été mise en oeuvre. Le modèle est validé avec d'autres simulations numériques puis exploité afin de mettre en évidence l'effet du nombre de Rayleigh et du nombre d'ailettes et de leur longueur sur le transfert de chaleur.

2. Définition du problème et modèle numérique

Soit de l'air emprisonné dans une cavité rhombique, illustrée à la Fig. 1, dont la géométrie est caractérisée par la largeur de la cavité, 'Eg' ('enclosure gap'), définie comme suit

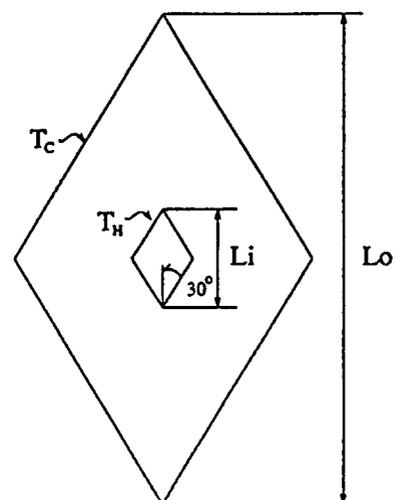


Fig. 1. Géométrie rhombique.

$$Eg = [L_o - L_i]/L_o \tag{1}$$

La paroi interne est maintenue à une température T_H supérieure à la température T_C de la paroi externe.

Pour les besoins de l'analyse, on admet que le fluide est incompressible et que l'écoulement engendré par la convection naturelle est laminaire, bidimensionnel, newtonien et symétrique par rapport à l'axe vertical passant par le milieu de la cavité. Les propriétés de l'air sont indépendantes de la température, sauf la densité, pour laquelle l'approximation de Boussinesq est valide [11]. Le rayonnement n'est pas pris en compte.

S'appuyant sur les hypothèses précédentes, les équations adimensionnelles décrivant le transfert de chaleur par convection naturelle s'énoncent ainsi

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \nabla \cdot \vec{\sigma} - T \tag{2}$$

$$\vec{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{RaPr}} \nabla \cdot T \right) \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{4}$$

avec

$$\vec{\sigma} = -P\vec{I} + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} [\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}]$$

Les conditions aux limites sont données à la Fig. 2. Toutes les propriétés du fluide sont évaluées à T_C . Notons que l'approximation de Boussinesq constitue

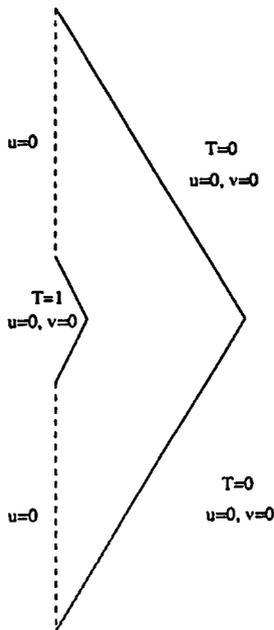


Fig. 2. Conditions aux limites.

une approximation des effets de la température sur la densité du fluide au voisinage de la température de référence T_C , et que sa validité pour nos simulations a été vérifiée dans Farinas [11].

2.1. Méthode numérique

Les Éqs. (2)–(4) ont été mises en oeuvre numériquement à l'aide d'une méthode d'éléments finis [12]. On utilise la linéarisation de Newton et on résout les équations en termes de résidus et corrections. Basées sur l'élément Crouseix–Raviart, les composantes de vitesse et de la température sont approximées par des polynômes quadratiques continus et la pression par des polynômes linéaires discontinus. Le taux de convergence de cet élément est d'ordre 2, en norme H^1 pour la vitesse et en norme L_2 pour la pression. De plus, aucun terme de stabilisation n'est ajouté aux équations. La convergence est atteinte lorsque la norme maximale du résidu et la norme maximale de la correction sont inférieures à 10^{-7} .

La méthode numérique consiste à résoudre une série de problèmes transitoires en augmentant le nombre de Rayleigh, avec la solution précédente utilisée comme condition initiale pour la simulation au Ra courant. Lorsqu'une solution transitoire a convergé, elle sert de condition initiale pour une simulation en régime stationnaire afin de trouver la solution stable. Cette méthode est analogue à l'évolution réelle du phénomène vers son état stationnaire.

La technique d'adaptivité retenue utilise une méthode d'estimation d'erreur pour contrôler la distribution du maillage [12]. Le principe de base de cette technique est l'obtention d'un maillage qui équirépartit l'erreur de la solution tout en satisfaisant une erreur relative cible. L'estimateur d'erreur de type Zienkiewicz–Zhu [13,14] est employé pour contrôler l'erreur de la solution numérique. Cet estimateur d'erreur définit l'erreur comme une différence entre les dérivés de la solution numérique et les dérivés d'une approximation de la solution exact. Cette technique d'adaptivité est expliquée en détail dans Labbé et Garon [15]. Dans la présente étude, toutes les simulations ont été répétées pour une erreur relative cible de 5%, 10% et 15%. On calcule l'erreur pour u , v et T puis, on détermine les tailles élémentaires optimales. On utilise alors la plus petite des trois tailles pour le raffinement.

3. Validation

Les prédictions du modèle développé ont été comparées aux résultats numériques de Moukalled et al. [10] pour une cavité rhombique. Ces derniers ont étudié le transfert de chaleur convectif dans quatre types d'anneaux rhombiques. Comme l'objectif ici est d'opti-

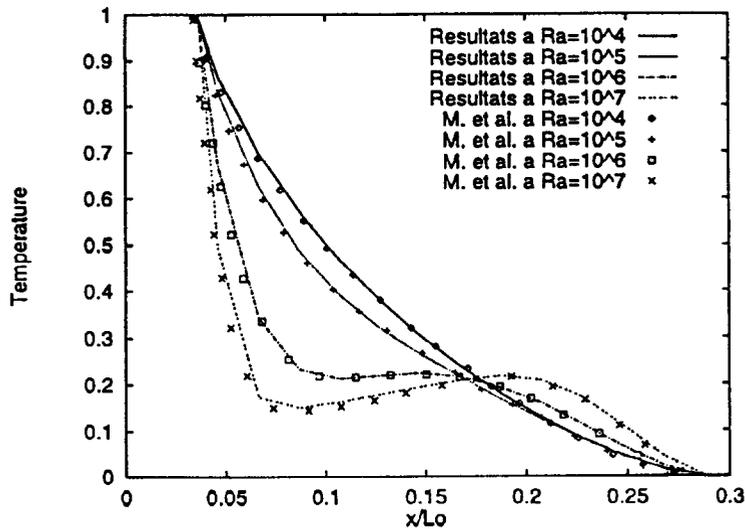


Fig. 3. Comparaison des profils de température au plan central de la géométrie, $Eg = 0.875$, 5%.

miser le transfert de chaleur par convection naturelle, seules les géométries ayant un angle rhombique élevé (30°) ont été étudiées. Des résultats numériques ont été obtenus pour des géométries dont les paramètres sont les suivants: $Eg = 0.25, 0.50, 0.75, 0.875$ et un angle d'ouverture de 30° (Fig. 1).

Dans la Fig. 3, on compare les profils de température obtenus au plan médian de la cavité pour $Eg = 0.875$. Le plan médian correspond au plan horizontal coupant la mi-hauteur de la cavité. La coordonnée x est compilée de la paroi interne vers la paroi externe. On remarque une très bonne corrélation entre les présentes simulations et celles de Moukalled et al. [10]. À la paroi chaude, on observe une augmentation proportionnelle entre le nombre de Rayleigh et le gradient de la solution. On remarque aussi une augmentation locale du gradient de température à la paroi froide. À faible Ra , en partant de la paroi chaude vers la paroi froide, la courbe décroît de manière monotone. Pour $Ra \geq 10^6$, la décroissance de la courbe n'est

plus monotone et on observe la présence d'un minimum et d'un maximum local entre les parois. L'inflexion dans les courbes est manifestement le résultat de la prédominance de la convection sur la conduction.

La méthode d'estimation d'erreur et de remaillage adaptatif permet une répartition des noeuds du maillage de façon à équilibrer l'erreur sur le domaine de calcul. Varier l'erreur relative cible permet de vérifier l'indépendance de la solution par rapport au maillage. Ceci explique les différences entre nos résultats et ceux de Moukalled et al. [10], qui utilisent le même maillage pour chaque Ra . Les résultats de nos simulations à 5%, 10% et 15% d'erreurs relatives cibles étant similaires, nous présenterons seulement ceux obtenus à 5%. Le principe de l'équilibrage de l'erreur permet d'obtenir la meilleure solution numérique satisfaisant une certaine erreur relative cible.

Les valeurs du nombre de Nusselt calculées ont été comparées avec les résultats numériques de Moukalled

Tableau 1
Nombres de Nusselt moyens (géométrie sans ailettes, paroi extérieure, 5%)

| Ra | $Eg = 0.25$ | | $Eg = 0.50$ | | $Eg = 0.75$ | | $Eg = 0.875$ | |
|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|
| | \overline{Nu} | Moukalled et al. |
| 10^3 | 12.94 | 14.36 | 4.94 | 5.08 | 2.26 | 2.23 | 1.44 | 1.40 |
| 10^4 | 12.94 | 14.41 | 4.94 | 5.08 | 2.26 | 2.23 | 1.44 | 1.40 |
| 10^5 | 12.94 | 14.41 | 4.96 | 5.08 | 2.43 | 2.37 | 1.75 | 1.69 |
| 5×10^5 | 12.95 | 14.41 | 5.30 | 5.42 | 3.76 | 3.27 | 2.80 | 2.75 |
| 10^6 | 12.97 | 14.42 | 5.99 | 5.94 | 4.63 | 4.49 | 3.33 | 3.24 |
| 5×10^6 | 13.46 | 14.51 | 9.55 | 8.85 | 6.97 | 6.92 | 4.76 | 4.62 |
| 10^7 | 14.36 | 15.24 | 11.70 | 11.55 | 8.21 | 8.10 | 5.50 | 5.41 |

Tableau 2

Conductivités équivalentes sur les murs chaud et froid, 5%, sans ailette

| Ra | $k_{\text{equ}}, Eg = 0.25$ | | $k_{\text{equ}}, Eg = 0.50$ | | $k_{\text{equ}}, Eg = 0.75$ | | $k_{\text{equ}}, Eg = 0.875$ | |
|-----------------|-----------------------------|-----------|-----------------------------|-----------|-----------------------------|-----------|------------------------------|-----------|
| | $T_H = 1$ | $T_C = 0$ | $T_H = 1$ | $T_C = 0$ | $T_H = 1$ | $T_C = 0$ | $T_H = 1$ | $T_C = 0$ |
| 10^3 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 10^4 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 10^5 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.08 | 1.08 | 1.21 | 1.22 |
| 5×10^5 | 1.00 | 1.00 | 1.07 | 1.07 | 1.66 | 1.66 | 1.95 | 1.94 |
| 10^6 | 1.00 | 1.00 | 1.21 | 1.21 | 2.05 | 2.05 | 2.31 | 2.31 |
| 5×10^6 | 1.04 | 1.04 | 1.93 | 1.93 | 3.09 | 3.08 | 3.30 | 3.31 |
| 10^7 | 1.11 | 1.11 | 2.37 | 2.37 | 3.63 | 3.63 | 3.81 | 3.82 |

et al. [10] (Tableau 1). En général, la correspondance entre les résultats est bonne. Plus Eg augmente et plus les présents résultats s'approchent de ceux de Moukalled et al. [10]. Également, l'écart entre les solutions diminue lorsque Ra augmente. À $Eg = 0.25$, soit la géométrie où les parois sont les plus rapprochées, on observe une plus grande différence entre les résultats. C'est pour cette géométrie que les \overline{Nu} sont les plus importants. Notons, contrairement à Moukalled et al. [10], que nos simulations n'ont pas été effectuées à partir d'un maillage structuré curviligne. De plus, les flux de température ont été calculés à l'aide d'une méthode basée sur le calcul des flux discrets (réaction) [11,16], qui est réputée pour être plus précise que le calcul direct de la dérivé normale du champ de température aux parois (i.e. l'erreur de discrétisation des flux discrets est du même ordre que l'erreur de discrétisation du champ de température).

On remarque au Tableau 2, que la conductivité équivalente k_{equ} varie autour de l'unité, quel que soit le Ra lorsque $Eg = 0.25$. La conduction domine. Par ailleurs, pour $Eg = 0.875$, le transfert de chaleur est dominé par la convection (k_{equ} est supérieur à 1). Ce phénomène s'amorce à partir de $Eg = 0.50$. Lorsque Eg augmente, on observe une variation des conductivités thermiques équivalentes qui est due à l'augmentation de la distance entre les parois chaude et froide. De plus, on peut réaliser que la qualité de la solution convergée est excellente, puisque la conductivité thermique équivalente sur la paroi chaude correspond à celle sur la paroi froide.

On enrichit les résultats d'une corrélation reliant la conductivité thermique équivalente, k_{equ} , au nombre de Rayleigh:

$$k_{\text{equ}} = CRa^n \quad (5)$$

Les coefficients C et n sont dépendants de Eg et Ra . Ils sont donnés au Tableau 3. Ces coefficients ont été générés à partir des meilleurs résultats (obtenus à 5%), pour les quatre géométries validées. En général, le

coefficient C diminue et l'exposant n augmente lorsque la largeur de la cavité Eg augmente. En effet, on associe, à une valeur de l'exposant élevée, un transfert de chaleur par convection. La valeur du coefficient C dépend plutôt de facteurs géométriques. On obtient ainsi deux couples de coefficients correspondants à deux plages de Ra distinctes pour chaque Eg . Ces plages sont reliées à des changements dans la topologie de l'écoulement en fonction du nombre de Rayleigh, et plus particulièrement lorsque le phénomène de conduction domine celui de convection.

4. Résultats et discussion

On désire maintenant étudier non seulement l'influence des ailettes sur le transfert de chaleur, mais aussi l'influence de la configuration des ailettes, pour chacune des quatre largeurs de cavité, ' Eg '. Les deux configurations d'ailettes étudiées et leurs conditions aux limites sont illustrées à la Fig. 4. Pour chaque longueur l d'ailette, des valeurs du nombre de Nusselt moyen ont été obtenues pour $Eg = 0.25, 0.50, 0.75$ et 0.875 , et ce, pour les deux configurations d'ailettes.

Tableau 3

Coefficients et plage de validité des corrélations ($k_{\text{equ}} = CRa^n$) pour les géométries sans ailettes

| Eg | C | n | Plage de Ra |
|-------|--------|--------|-----------------|
| 0.25 | 1 | 0 | 10^3 – 10^6 |
| | 0.5699 | 0.0404 | 10^6 – 10^7 |
| 0.50 | 1 | 0 | 10^3 – 10^5 |
| | 0.0909 | 0.1968 | 10^5 – 10^7 |
| 0.75 | 0.8840 | 0.0161 | 10^3 – 10^5 |
| | 0.0516 | 0.2648 | 10^5 – 10^7 |
| 0.875 | 0.7246 | 0.0421 | 10^3 – 10^5 |
| | 0.0746 | 0.2458 | 10^5 – 10^7 |

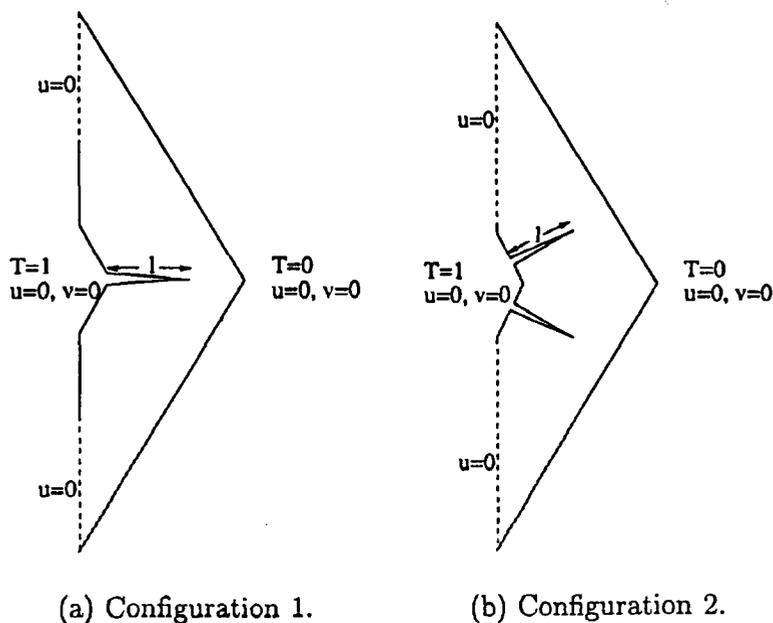


Fig. 4. Configurations d'aillettes.

Tableau 4

Nombre de Nusselt moyen sur la paroi froide, à 5% avec les deux configurations d'aillettes, $l = 0.5$

| Ra | $\overline{Nu}, Eg = 0.25$ | | $\overline{Nu}, Eg = 0.50$ | | $\overline{Nu}, Eg = 0.75$ | | $\overline{Nu}, Eg = 0.875$ | |
|-----------------|----------------------------|-----------------|----------------------------|-----------------|----------------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------|
| | Configuration 1 | Configuration 2 | Configuration 1 | Configuration 2 | Configuration 1 | Configuration 2 | Configuration 1 | Configuration 2 |
| 10^3 | 14.41 | 13.73 | 6.43 | 5.74 | 3.75 | 3.30 | 2.99 | 2.76 |
| 10^4 | 14.41 | 13.73 | 6.43 | 5.74 | 3.75 | 3.31 | 2.99 | 2.76 |
| 10^5 | 14.41 | 13.73 | 6.44 | 5.76 | 3.89 | 3.41 | 3.17 | 2.84 |
| 5×10^5 | 14.41 | 13.74 | 6.81 | 6.29 | 5.21 | 4.47 | 4.54 | 3.75 |
| 10^6 | 14.43 | 13.77 | 7.61 | 7.23 | 6.26 | 5.22 | 5.46 | 4.40 |
| 5×10^6 | 14.98 | 14.71 | 11.71 | 10.64 | 9.49 | 7.32 | 8.43 | 6.36 |
| 10^7 | 16.15 | 16.49 | 14.31 | 12.54 | 11.36 | 8.42 | 9.95 | 7.91 |

Tableau 5

Conductivité équivalente sur la paroi froide, à 5% et $l = 0.5$ avec les deux configurations d'aillettes

| Ra | $k_{equ}, Eg = 0.25$ | | $k_{equ}, Eg = 0.50$ | | $k_{equ}, Eg = 0.75$ | | $k_{equ}, Eg = 0.875$ | |
|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------|
| | Configuration 1 | Configuration 2 | Configuration 1 | Configuration 2 | Configuration 1 | Configuration 2 | Configuration 1 | Configuration 2 |
| 10^3 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 10^4 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 10^5 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.04 | 1.03 | 1.06 | 1.03 |
| 5×10^5 | 1.00 | 1.00 | 1.06 | 1.10 | 1.39 | 1.35 | 1.52 | 1.36 |
| 10^6 | 1.00 | 1.00 | 1.18 | 1.26 | 1.67 | 1.58 | 1.83 | 1.59 |
| 5×10^6 | 1.04 | 1.07 | 1.82 | 1.85 | 2.53 | 2.21 | 2.82 | 2.31 |
| 10^7 | 1.12 | 1.20 | 2.23 | 2.18 | 3.03 | 2.55 | 3.33 | 2.87 |

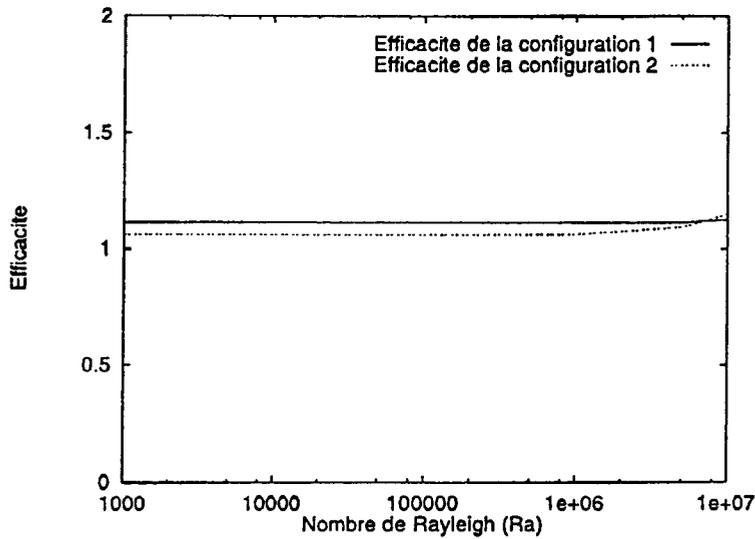


Fig. 5. Efficacité des deux configurations en fonction de Ra , $Eg = 0.25$, $l = 0.5$, 5%.

4.1. Résultats pour des configurations d'ailettes différentes

La comparaison entre les deux configurations d'ailettes est réalisée avec la longueur d'ailette $l = 0.5$, à une erreur relative de 5%. Les nombres de Nusselt et les conductivités thermiques équivalentes correspondants sont présentés aux Tableaux 4 et 5.

Le Tableau 4 montre clairement que la première configuration génère un transfert de chaleur supérieur à la seconde configuration pour tous les nombres de Rayleigh et toutes les géométries. De plus, pour un nombre de Rayleigh constant, le transfert de chaleur

varie inversement à l'augmentation de la distance entre les parois chaude et froide de la cavité (i.e. Eg augmente). Ce phénomène s'explique par un changement dans le transfert de chaleur. Comme l'illustre le Tableau 5, lorsque les parois chaudes et froides sont rapprochées, la conductivité thermique équivalente est approximativement unitaire pour tous les Ra . La conduction domine. Lorsque Eg augmente, la conductivité thermique équivalente augmente. La convection devient alors le phénomène de transfert thermique dominant.

La performance des ailettes peut être évaluée pour une géométrie ayant un même rapport de forme Eg , et

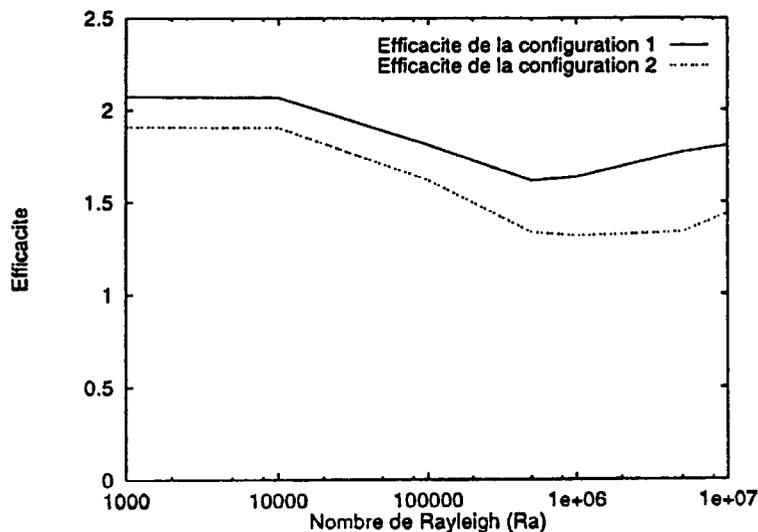


Fig. 6. Efficacité des deux configurations en fonction de Ra , $Eg = 0.875$, $l = 0.5$, 5%.

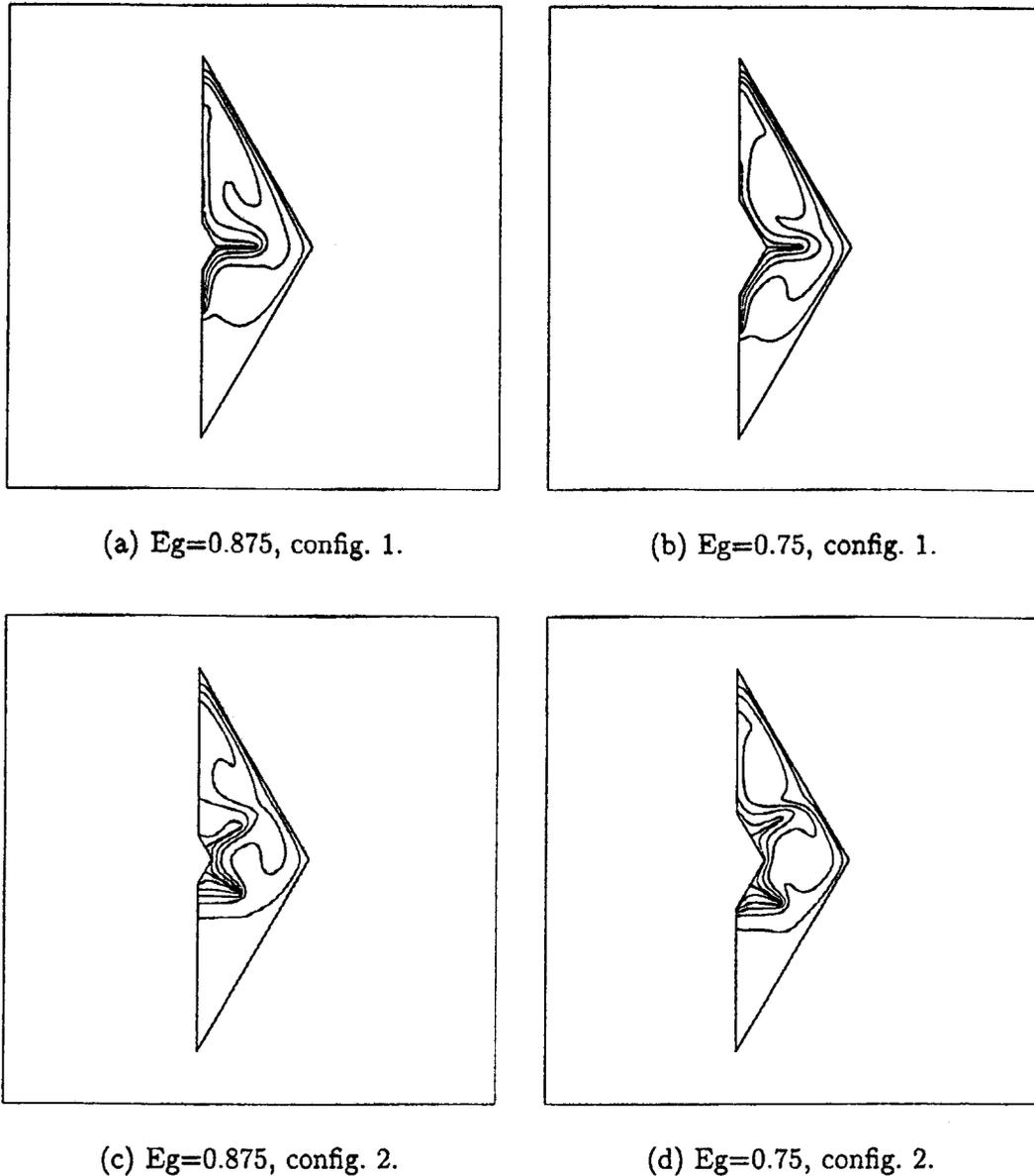


Fig. 7. Isothermes ($T = 0.0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0$) à $Ra = 10^7$, $l = 0.5, 5\%$.

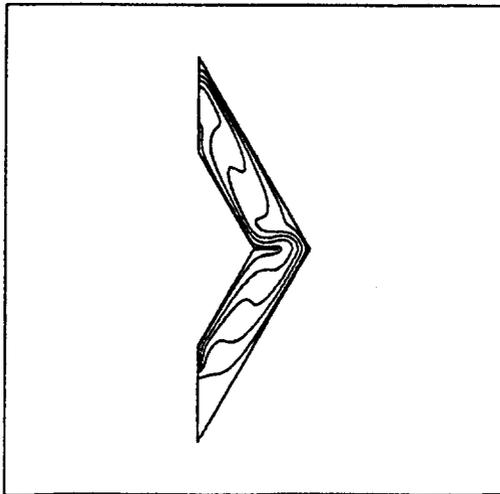
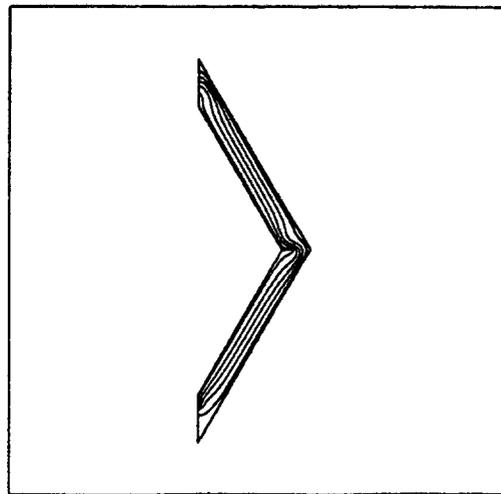
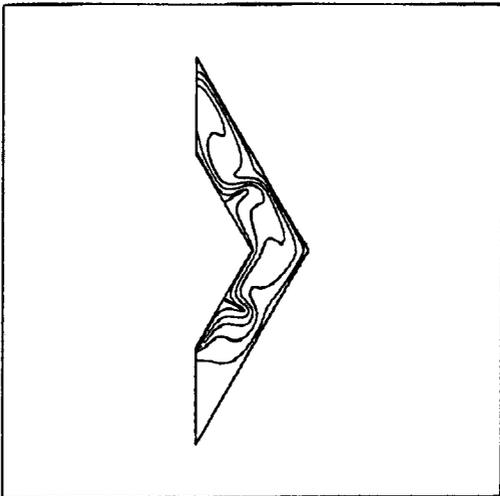
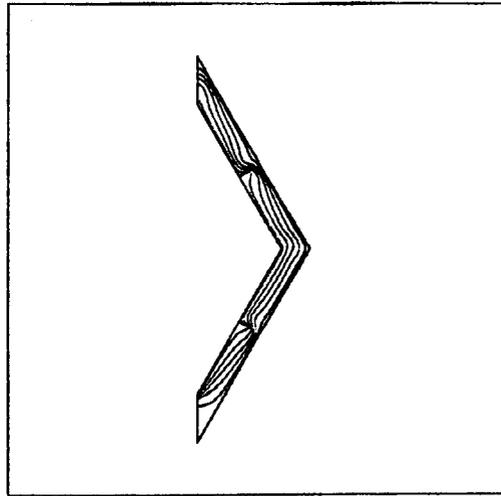
pour un même Ra , par:

$$\text{Efficacité} = \frac{\overline{Nu} \text{ avec ailettes}}{\overline{Nu} \text{ sans ailette}} \quad (6)$$

Avec $Eg = 0.25$ (Fig. 5), les efficacités des configurations 1 et 2 sont très voisines pour tout Ra ; cela s'explique par le phénomène de conduction dominant le transfert de chaleur. Par contre, lorsque $Eg = 0.875$ (Fig. 6), on observe que la configuration 1 est nettement supérieure à la configuration 2, et que la différence d'efficacité entre les 2 configurations semble

croître sur presque tout l'ensemble des nombres de Ra simulés. Pour les deux configurations, lorsque la conduction domine ($Ra = 10^3-10^4$), la courbe forme un plateau. Par la suite, lorsque la conduction et la convection s'affrontent, on constate que l'efficacité diminue et atteint un minimum local à environ $Ra = 10^6$. Finalement, lorsque la convection domine ($Ra \geq 10^6$), l'efficacité augmente.

Dans les Figs. 7 et 8, on note, pour la configuration 1, que la distribution des isothermes dans toutes les géométries est beaucoup plus rapprochée des surfaces d'échange que pour la configuration 2. En effet, la pre-

(a) $Eg=0.50$, config. 1.(b) $Eg=0.25$, config. 1.(c) $Eg=0.50$, config. 2.(d) $Eg=0.25$, config. 2.Fig. 8. Isothermes ($T = 0.0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0$) à $Ra = 10^7$, $l = 0.5$, 5%.

mière configuration d'ailettes favorise davantage le déplacement du fluide chauffé vers le haut, d'où un renouvellement plus efficace par du fluide froid et un meilleur pompage thermique. On remarque, pour la configuration 2, que la position des ailettes a pour effet de retenir le fluide chauffé dans la partie inférieure de la cavité, nuisant ainsi au transfert convectif. Ceci explique la meilleure efficacité obtenue pour la première configuration. De plus, on remarque que pour chaque Eg , la configuration 2 génère une zone de stagnation, dans la partie inférieure de la cavité, plus

importante que pour la configuration 1. Dans cette zone le transfert de chaleur convectif est mauvais.

4.2. Résultats pour des longueurs d'ailettes différentes

Dans la section précédente, on a montré que le transfert de chaleur était plus important avec la configuration d'ailettes 1. Nous désirons maintenant étudier l'influence des longueurs d'ailettes l sur le transfert de chaleur pour cette configuration (Fig. 4).

Tel que prévu, on constate au Tableau 6 que le

Tableau 6

Nombre de Nusselt moyen sur la paroi froide, à 5% pour les quatre géométries, configuration 1

| Eg | Ra | \overline{Nu} pour $l = 0.3$ | \overline{Nu} pour $l = 0.5$ | \overline{Nu} pour $l = 0.7$ |
|-------|--------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 0.25 | 10^3 | 13.65 | 14.41 | 15.43 |
| | 10^5 | 13.65 | 14.41 | 15.43 |
| | 10^7 | 15.27 | 16.15 | 17.15 |
| 0.50 | 10^3 | 5.66 | 6.43 | 7.46 |
| | 10^5 | 5.67 | 6.44 | 7.47 |
| | 10^7 | 12.86 | 14.31 | 15.44 |
| 0.75 | 10^3 | 2.99 | 3.75 | 4.78 |
| | 10^5 | 3.13 | 3.89 | 4.91 |
| | 10^7 | 9.78 | 11.36 | 13.27 |
| 0.875 | 10^3 | 2.23 | 2.99 | 4.00 |
| | 10^5 | 2.42 | 3.17 | 4.17 |
| | 10^7 | 7.78 | 9.95 | 11.88 |

Tableau 7

Coefficients et plage de validité des corrélations ($k_{equ} = CRa^n$) pour les géométries $Eg = 0.25$ et $Eg = 0.50$ avec ailettes

| Eg | l | Configuration 1 | | Configuration 2 | | Plage de Ra |
|------|-----|-----------------|--------|-----------------|--------|---------------|
| | | C | n | C | n | |
| 0.25 | 0.3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 10^3-10^6 |
| | | 0.5439 | 0.0437 | 0.4475 | 0.0577 | 10^6-10^7 |
| | 0.5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 10^3-10^6 |
| | | 0.5392 | 0.0443 | 0.3686 | 0.0716 | 10^6-10^7 |
| | 0.7 | 1 | 0 | 1 | 0 | 10^3-10^6 |
| | | 0.5835 | 0.0389 | 0.3612 | 0.0736 | 10^6-10^7 |
| 0.50 | 0.3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 10^3-10^5 |
| | | 0.0999 | 0.1888 | 0.1227 | 0.1732 | 10^5-10^7 |
| | 0.5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 10^3-10^5 |
| | | 0.1076 | 0.1825 | 0.1168 | 0.1780 | 10^5-10^7 |
| | 0.7 | 1 | 0 | 1 | 0 | 10^3-10^5 |
| | | 0.1309 | 0.1662 | 0.1260 | 0.1716 | 10^5-10^7 |

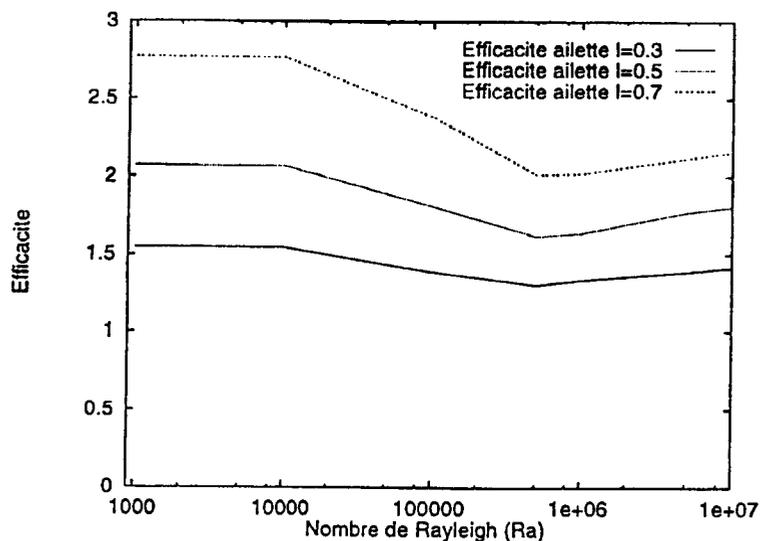
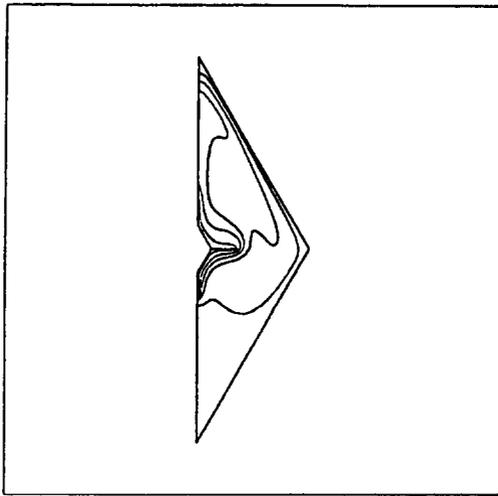
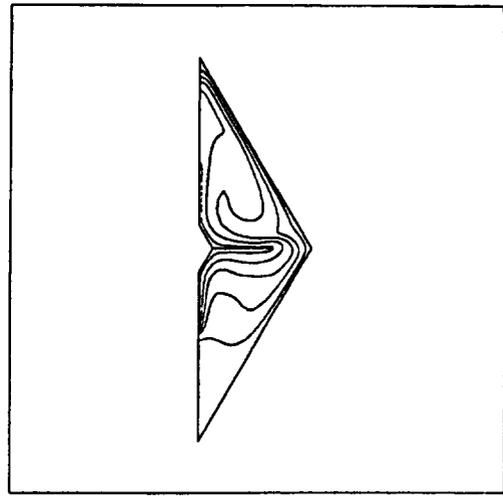
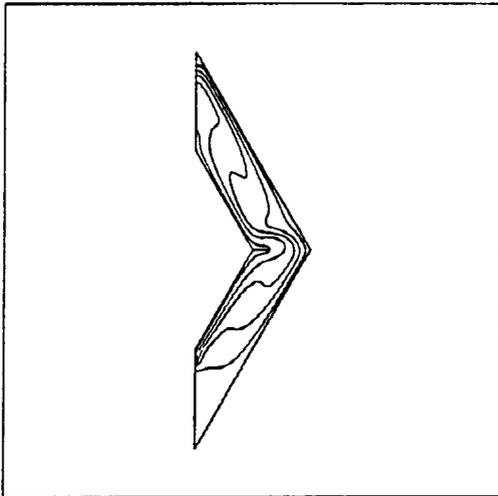
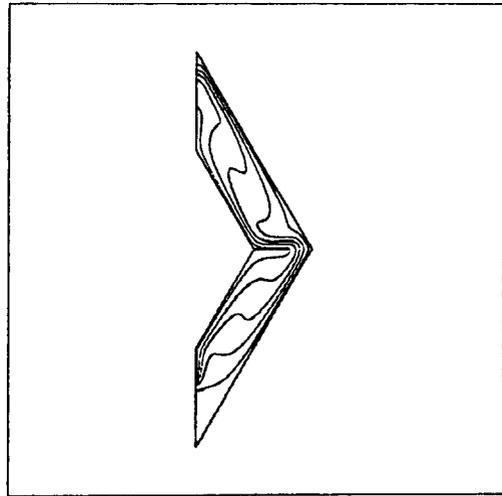


Fig. 9. Variation de l'efficacité en fonction de la longueur des ailettes.

(a) $Eg=0.875, l=0.3$.(b) $Eg=0.875, l=0.7$.(c) $Eg=0.50, l=0.3$.(d) $Eg=0.50, l=0.7$.Fig. 10. Isothermes ($T = 0.0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0$) à $Ra = 10^7$, 5%, configuration 1.

transfert de chaleur (\overline{Nu}) augmente avec la longueur des ailettes, quel que soit le nombre de Rayleigh et la largeur de la cavité. Pour une longueur d'ailette constante, \overline{Nu} chute radicalement en passant de $Eg = 0.25$ à $Eg = 0.50$, tandis qu'il augmente pour une même géométrie à Ra constant, lorsque l augmente. Cette observation tient pour tout Eg .

La Fig. 9 illustre l'évolution de l'efficacité de la configuration 1 en fonction du Ra et de la longueur d'ailette. On constate que l'ailette $l = 0.7$ génère une efficacité toujours supérieure aux autres longueurs

d'ailettes. Notons que toutes les longueurs d'ailettes ont une efficacité supérieure à 1. L'allure des courbes est de plus semblable à celle illustrée à la Fig. 6. Elle reflète les différentes régions de transfert de chaleur.

Des isothermes sont présentés à la Fig. 10 pour les géométries $Eg = 0.875$ et 0.50 , à $Ra = 10^7$. On remarque qu'en augmentant la longueur des ailettes, celles-ci isolent de plus en plus les écoulements dans les parties inférieure et supérieure de la cavité. On peut remarquer l'impact de ce phénomène sur les isothermes. Ainsi pour $l = 0.3$, les isothermes sont très concentrées dans

Tableau 8

Coefficients et plage de validité des corrélations ($k_{\text{equ}} = CRa^n$) pour les géométries $Eg = 0.75$ et $Eg = 0.875$ avec ailettes

| Eg | l | Configuration 1 | | Configuration 2 | | Plage de Ra |
|-------|-----|-----------------|--------|-----------------|--------|-----------------|
| | | C | n | C | n | |
| 0.75 | 0.3 | 0.9296 | 0.0096 | 0.9436 | 0.0076 | 10^3 – 10^5 |
| | | 0.0554 | 0.2524 | 0.0681 | 0.2329 | 10^5 – 10^7 |
| | 0.5 | 0.9412 | 0.0079 | 0.9502 | 0.0067 | 10^3 – 10^5 |
| | | 0.0651 | 0.2368 | 0.1019 | 0.1992 | 10^5 – 10^7 |
| | 0.7 | 0.9581 | 0.0056 | 0.9585 | 0.0055 | 10^3 – 10^5 |
| | | 0.0756 | 0.2215 | 0.1171 | 0.1861 | 10^5 – 10^7 |
| 0.875 | 0.3 | 0.8609 | 0.0195 | 0.9170 | 0.0113 | 10^3 – 10^5 |
| | | 0.0601 | 0.2523 | 0.0613 | 0.2455 | 10^5 – 10^7 |
| | 0.5 | 0.9052 | 0.0131 | 0.9511 | 0.0065 | 10^3 – 10^5 |
| | | 0.0572 | 0.2519 | 0.0767 | 0.2219 | 10^5 – 10^7 |
| | 0.7 | 0.9307 | 0.0094 | 0.9618 | 0.0051 | 10^3 – 10^5 |
| | | 0.0707 | 0.2310 | 0.1186 | 0.1852 | 10^5 – 10^7 |

la partie supérieure froide. La majeure partie de la chaleur est extraite dans la partie inférieure et transférée à la partie supérieure. Pour $l = 0.7$, les isothermes sont également réparties dans les parties chaudes et froides de la cavité, ce qui suggère que l'ensemble des surfaces d'échange participent activement au transfert de chaleur convectif.

4.3. Corrélations des géométries avec ailettes

Les résultats obtenus pour des cavités ailetées ont été corrélés pour la conductivité équivalente k_{equ} en fonction du nombre de Rayleigh et ce pour toutes les géométries à 5% et pour les configurations 1 et 2 (Éq. (6)). Les coefficients C et n sont donnés aux Tableaux 7 et 8.

On constate, pour les deux configurations, que lorsque Eg augmente, le coefficient C diminue et l'exposant n augmente. Ceci confirme le passage d'un mode de transfert de chaleur par conduction à un mode de transfert de chaleur par convection au fur et à mesure que la largeur de la cavité croît. Par contre, pour un même Eg , le coefficient C augmente et l'exposant n diminue lorsque l'ailette grandit. En effet, plus grande est la surface de l'ailette, plus le transfert de chaleur par conduction est favorisé. En général, les coefficients associés à la seconde configuration sont supérieurs à ceux de la première configuration.

5. Conclusion

La convection naturelle dans une cavité rhombique avec et sans ailettes a été étudiée numériquement. La stratégie numérique utilisée consiste à résoudre une série de problèmes instationnaires, en augmentant gra-

duellement le nombre de Rayleigh. La méthode numérique a été validée, ainsi que les résultats sur la géométrie rhombique sans ailette, par comparaison avec les résultats de Moukalled et al. [10]. Pour un même Ra , on a vérifié l'indépendance de la solution par rapport au maillage en faisant varier l'erreur relative cible de 15% à 5%. Les résultats sont similaires à ceux présentés dans [10]. Toutefois, contrairement à cette étude qui repose sur un maillage fixe, nous avons utilisé ici une méthode d'éléments finis qui, en prenant en compte l'équirépartition de l'erreur sur le domaine, permet de concentrer des noeuds de calcul dans les régions où de forts gradients de la solution existent. Cette méthode est plus précise.

L'étude de la géométrie rhombique a révélé que le meilleur transfert de chaleur est obtenu avec la première configuration d'ailettes pour $Eg = 0.25$ et $l = 0.7$. Cependant, le transfert de chaleur a lieu par conduction, et non par convection naturelle. Ceci est dû au fait que la géométrie $Eg = 0.25$ comporte des parois très rapprochées, ce qui minimise la résistance thermique au sein de la cavité. Le phénomène de convection naturelle s'intensifie lorsque la largeur de la cavité augmente. Quand la convection domine le transfert de chaleur, la configuration 1 avec $Eg = 0.875$ et $l = 0.7$ offre la meilleure performance. Enfin, les conductivités thermiques équivalentes ont été corrélées en fonction des nombres de Rayleigh pour l'ensemble des géométries rhombiques étudiées.

Remerciements

Les auteurs témoignent leur gratitude à l'égard du CRSNG pour leur support financier.

References

- [1] S. Ostrach, Natural convection in enclosures, *J. Heat Transfer* 110 (1988) 1175–1190.
- [2] T.H. Kuehn, R.J. Goldstein, An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders, *J. Fluid Mech.* 74 (1976) 695–719.
- [3] A. Castrejon, D.B. Spalding, An experimental and theoretical study of transient free-convection flow between horizontal concentric cylinders, *Int. J. Heat Mass Transfer* 31 (2) (1988) 273–284.
- [4] R. Kumar, Study of natural convection in horizontal annuli, *Int. J. Heat Mass Transfer* 31 (6) (1988) 1137–1149.
- [5] P.M. Kolesnikov, V.I. Bubnovich, Non-stationary conjugate free-convective heat transfer in horizontal cylindrical coaxial channels, *Int. J. Heat Mass Transfer* 31 (6) (1988) 1149–1156.
- [6] C.J. Ho, Y.H. Lin, Natural convection heat transfer of cold water within an eccentric horizontal cylindrical annulus, *J. Heat Transfer* 110 (1988) 894–900.
- [7] D. Naylor, H.M. Badr, J.D. Tarasuk, Experimental and numerical study of natural convection between two eccentric tubes, *Int. J. Heat Transfer* 32 (1) (1989) 171–181.
- [8] J.H. Lee, T.S. Lee, Natural convection in the annuli between horizontal confocal elliptic cylinders, *Int. J. Heat Mass Transfer* 24 (10) (1981) 1739–1981.
- [9] K.S. Chang, Y.H. Won, C.H. Cho, Patterns of natural convection around a square cylinder placed concentrically in a horizontal circular cylinder, *J. Heat Transfer* 105 (1983) 273–280.
- [10] F. Moukalled, H. Diab, S. Acharya, Laminar natural convection in a horizontal rhombic annulus, *Numer. Heat Transfer* 24 (1993) 89–107.
- [11] M.I. Farinas, Simulation numérique de la convection naturelle d'un fluide newtonien entre deux cylindres concentriques avec ou sans ailettes. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Montréal 1995.
- [12] M.I. Farinas, A. Garon, K. St-Louis, Study of heat transfer in a horizontal cylinder with fins, *Rev. Fén. Therm.* 36 (1997) 398–410.
- [13] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 33 (7) (1992) 1331–1364.
- [14] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: error estimates and adaptivity, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 33 (7) (1992) 1365–1382.
- [15] P. Labbé, A. Garon, A robust implementation of Zienkiewicz and Zhu's local patch recovery method, *Comm. in Numer. Methods in Eng.* 11 (1995) 427–434.
- [16] B. Szabo, I. Babuska, *Finite Element Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1991.